第 25 卷 第 4 期
2019 年 8 月
上海大学学报（自然科学版）
JOURNAL OF SHANGHAI UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)
Vol. 25 No. 4
Aug. 2019

DOI: 10.12066/j.issn.1007-2861.2032

非对称的 L_p-径向差体

齐 继 兵
(1. 上海大学 理学院, 上海 200444; 2. 合肥师范学院 数学与统计学院, 合肥 230601)

摘要: 定义了关于星体的非对称的L_p-径向差体, 研究了其性质, 建立了关于非对称 L_p-径向差体的对偶均值积分的几个不等式. 作为其特例, 得到非对称L_p-径向差体体积的几个不等式.

关键词： 星体; 差体; 均值积分; 凸几何
中图分类号： O 184 **文献标志码：** A **文章编号：** 1007-2861(2019)04-0493-09

Asymmetric L_p-radial difference bodies

QI Jibing
(1. College of Sciences, Shanghai University, Shanghai 200444, China;
2. Department of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

Abstract: The notion of asymmetric L_p-radial difference bodies about star bodies has been defined, and some of their properties have been studied. Some inequalities for dual quermassintegrals of asymmetric L_p-radial difference bodies have been established. In particular, some inequalities for the volumes of asymmetric L_p-radial difference bodies have been obtained.

Key words: star body; difference bodies; dual quermassintegrals; convex geometry

1 已有结果

近几年, 非对称的L_p-Brunn-Minkowski 理论是凸几何理论的一个新的而且发展迅速的方向[1-16]. 本工作给出了文献 [14] 的对偶结果, 研究了关于星体的非对称L_p-径向差体的一些性质, 建立了关于非对称的L_p-径向差体的均值积分的几何不等式. 作为其特例, 得到非对称L_p-径向差体体积的一些不等式.

设φ^n为 n 维欧氏空间R^n中全体星体(关于原点)的集合, 关于原点对称的星体的全体记为φ^n_s. 设$K \in \varphi^n$, 其径向函数定义[17]为

$$\rho_K(x) = \rho(K,x) = \max\{\lambda \geqslant 0 : \lambda x \in K\}, \quad x \in R^n \backslash \{o\}. \tag{1}$$

对于两个星体K, L, 如果存在一常数 $\lambda > 0$, 使得它们的径向函数满足 $\rho(K,\cdot) = \lambda\rho(L,\cdot)$, 则称这两个星体相互膨胀. 设 $K, L \in \varphi^n, p \geqslant 1, \lambda, \mu \geqslant 0$ 不全为 0, L_p-径向线性组合$\lambda \cdot K \widetilde{+}_p \mu \cdot L \in \varphi^n$定义[17]为

$$\rho(\lambda \cdot K \widetilde{+}_p \mu \cdot L, \cdot)^p = \lambda\rho(K,\cdot)^p + \mu\rho(L,\cdot)^p, \tag{2}$$

收稿日期: 2017-10-26
基金项目: 安徽省自然科学基金资助项目(1908085QA04)
通信作者: 齐继兵(1981—), 男, 博士, 研究方向为凸几何分析. E-mail: qijibing@ahu.edu.cn

式中, $\lambda\cdot K=\lambda^{\frac{1}{p}}K$. 特别地, 当 $p=n-1$ 时, $\lambda\cdot K\widetilde{+}_{n-1}\,\mu\cdot L\in\varphi^n$ 称为径向 Blaschke 线性组合[18]; 当 $p\leqslant -1$ 时, $\lambda\cdot K\widetilde{+}_p\,\mu\cdot L\in\varphi^n$称为调和-$p$ 组合[19].

设 $K\in\varphi^n, p\geqslant 1, \tau\in[-1,1]$, 引出 L_p- 径向差体 $\widetilde{\Delta}_pK$ 与非对称的 L_p-径向差体 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$, 定义为

$$\widetilde{\Delta}_pK=\frac{1}{2}\cdot K\widetilde{+}_p\,\frac{1}{2}\cdot(-K), \tag{3}$$

$$\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=f_1(\tau)\cdot K\widetilde{+}_p\,f_2(\tau)\cdot(-K). \tag{4}$$

这里

$$f_1(\tau)=\frac{(1+\tau)^p}{(1+\tau)^p+(1-\tau)^p},\quad f_2(\tau)=\frac{(1-\tau)^p}{(1+\tau)^p+(1-\tau)^p},\quad \tau\in[-1,1]. \tag{5}$$

特别地, 当$\tau=0$, $p=1$时, $\widetilde{\Delta}^{\tau}K=\widetilde{\Delta}K$[18]. 另外, $\widetilde{\Delta}_p^{0}K=\widetilde{\Delta}_pK$, $\widetilde{\Delta}_p^{+1}K=K$, $\widetilde{\Delta}_p^{-1}K=-K$. 由式(5)可得

$$f_1(\tau)+f_2(\tau)=1,\quad f_1(-\tau)=f_2(\tau),\quad f_2(-\tau)=f_1(\tau). \tag{6}$$

设$K\in\varphi^n$, K 的第 i 个对偶均值积分定义[17]为

$$\widetilde{W}_i(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(K,u)^{n-i}\mathrm{d}S(u), \tag{7}$$

式中, $S(\cdot)$为通常的球面 Lebesgue 测度.

在 φ^n中, 星体$K\mapsto K^o$的一种对偶被称为星对偶, 定义[20]为

$$\rho(K^o,\cdot)\cdot\rho(K,\cdot)=1. \tag{8}$$

本工作的主要目标是研究关于星体的非对称径向差体及其星对偶的对偶均值积分的极值问题. 进一步地, 本工作给出了关于星体的对偶 Blaschke-Santaló 型不等式.

定理 1 设$K\in\varphi^n, \tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1, 0\leqslant i\leqslant n-1$, 则有

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_pK)\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)\leqslant\widetilde{W}_i(K). \tag{9}$$

如果 K 不关于原点中心对称, 则左边不等式等号成立当且仅当 $\tau=0$; 右边不等式等号成立当且仅当 $\tau=\pm1$. 如果 K 关于原点中心对称, 则式(9)中的两个不等式是恒等式.

在定理 1 中取 $i=0$, 并注意到 $\widetilde{W}_0(K)=V(K)$, 本工作得到如下推论.

推论 1 设$K\in\varphi^n$, $\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1$, 则有

$$V(\widetilde{\Delta}_pK)\leqslant V(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)\leqslant V(K). \tag{10}$$

如果 K 不关于原点中心对称, 则左边不等式等号成立当且仅当 $\tau=0$; 右边不等式等号成立当且仅当 $\tau=\pm1$. 如果 K 关于原点中心对称, 则式(10)中的两个不等式是恒等式.

设$\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K$为非对称 L_p 径向差体 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$ 的星对偶, 则可获得如下关于非对称 L_p 径向差体的星对偶均值积分的极值结果.

定理 2 设$K\in\varphi^n, \tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1, 0\leqslant i\leqslant n-1$, 则有

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{o}K)\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\leqslant\widetilde{W}_i(K^o). \tag{11}$$

如果 K 不关于原点中心对称, 则左边不等式等号成立当且仅当 $\tau=0$; 右边不等式等号成立当且仅当 $\tau=\pm1$. 如果 K 关于原点中心对称, 则式(11)中的两个不等式是恒等式.

在定理 2 中取 $i=0$, 可得到如下推论.

推论 2　设$K\in\varphi^n$, $\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant1$, 则有

$$V(\widetilde{\Delta}_p^oK)\leqslant V(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\leqslant V(K^o). \tag{12}$$

如果 K 不关于原点中心对称, 则左边不等式等号成立当且仅当 $\tau=0$; 右边不等式等号成立当且仅当 $\tau=\pm1$. 如果 K 关于原点中心对称, 则式(12)中的两个不等式是恒等式.

设 ω_n 为欧氏空间R^n中单位球的体积, 则可获得如下关于星体的非对称 L_p 径向差体的对偶均值积分的对偶 Blaschke-Santaló 型不等式.

定理 3　设$K\in\varphi^n,\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant1, 0\leqslant i\leqslant n-1$, 则有

$$\widetilde{W}_i(K)\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\geqslant\omega_n^2,$$

等号成立当且仅当 K 为球心在原点的球.

推论 3　设$K\in\varphi^n,\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant1$, 则有

$$V(K)V(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\geqslant\omega_n^2,$$

等号成立当且仅当 K 为球心在原点的球.

2　准备工作

设$K,L\in\varphi^n,p\geqslant1,\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$(不全为 0), 调和 p-组合$\lambda\cdot K\widetilde{+}_{-p}\,\mu\cdot L$定义[17,19]为

$$\rho(\lambda\cdot K\widetilde{+}_{-p}\,\mu\cdot L,\cdot)^{-p}=\lambda\rho(K,\cdot)^{-p}+\mu\rho(L,\cdot)^{-p}, \tag{13}$$

式中, $\lambda\cdot K=\lambda^{\frac{1}{-p}}K\ (\lambda>0)$, 当式 $\lambda=0$时, $\lambda\cdot K=\{o\}$. 对于实数 $i\neq n,n+p$, 关于星体 K 和 L 的 L_p-对偶混合均值积分[21]为

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{-p,i}(K,L)&=\frac{-p}{n-i}\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{\widetilde{W}_i(K\widetilde{+}_{-p}\,\varepsilon\cdot L)-\widetilde{W}_i(K)}{\varepsilon}\\&=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K(u)^{n+p-i}\rho_L(u)^{-p}\mathrm{d}S(u).\end{aligned} \tag{14}$$

设 $Q,K,L\in\varphi^n,p\geqslant1,\lambda\geqslant0,\mu\geqslant0$(不全为 0), 结合式(13)和(14), 有

$$\widetilde{W}_{-p,i}(Q,\ \lambda\cdot K\widetilde{+}_{-p}\,\mu\cdot L)=\lambda\widetilde{W}_{-p,i}(Q,K)+\mu\widetilde{W}_{-p,i}(Q,L). \tag{15}$$

引理 1[21]　如果$K,L\in\varphi^n,p\geqslant1,\lambda,\mu>0,\ 0\leqslant i<n$, 那么

$$\widetilde{W}_{-p,i}(K,L)^{n-i}\geqslant\widetilde{W}_i(K)^{n-i+p}\widetilde{W}_i(L)^{-p}, \tag{16}$$

$$\widetilde{W}_i(\lambda\cdot K\widetilde{+}_{-p}\,\mu\cdot L)^{\frac{-p}{n-i}}\geqslant\lambda\widetilde{W}_i(K)^{\frac{-p}{n-i}}+\mu\widetilde{W}_i(L)^{\frac{-p}{n-i}}, \tag{17}$$

式(16)和(17)等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀.

引理 2[22]　若$K,L\in\varphi^n,p\geqslant1,\lambda,\mu>0,\ 0\leqslant i\leqslant n-1$, 则

$$\widetilde{W}_i(\lambda\cdot K\widetilde{+}_p\,\mu\cdot L)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant\lambda\widetilde{W}_i(K)^{\frac{p}{n-i}}+\mu\widetilde{W}_i(L)^{\frac{p}{n-i}}, \tag{18}$$

等号成立当且仅当 K 和 L 互为膨胀.

根据 Cauchy-Schwartz 不等式以及式(7)和(8)容易得到下面的引理.

引理 3 设$K \in \varphi^n, 0 \leqslant i < n$, 则

$$\widetilde{W}_i(K)\widetilde{W}_i(K^o) \geqslant w_n^2, \tag{19}$$

等号成立当且仅当 K 是中心在原点的球.

3 非对称 L_p-径向差体的一些性质

为了证明主要结果, 本工作给出了关于非对称 L_p-径向差体的一些性质.

定理 4 设$K \in \varphi^n$, $\tau \in [-1,1], p \geqslant 1, \phi$ 为非退化的线性变换, 有

$$\widetilde{\Delta}_p^{\tau}\phi K = \phi\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, \tag{20}$$

$$\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K = \widetilde{\Delta}_p^{\tau}(-K) = -\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, \tag{21}$$

若 $\tau \neq 0$, 则

$$\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K = \widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K \ \Leftrightarrow \ K = -K. \tag{22}$$

证明 设$u \in S^{n-1}$, 由式(1), (2)和(4), 可得

$$\begin{aligned}\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}\phi K, u)^p &= f_1(\tau)\rho(\phi K, u)^p + f_2(\tau)\rho(-\phi K, u)^p \\ &= f_1(\tau)\rho(K, \phi^{-1}u)^p + f_2(\tau)\rho(-K, \phi^{-1}u)^p \\ &= \rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, \phi^{-1}u)^p = \rho(\phi\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, u)^p,\end{aligned}$$

式(20)得证. 根据式(5), (8)和(9), 有

$$\begin{aligned}\rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K, u)^p &= f_1(-\tau)\rho(K, u)^p + f_2(-\tau)\rho(-K, u)^p \\ &= f_2(\tau)\rho(K, u)^p + f_1(\tau)\rho(-K, u)^p \\ &= f_1(\tau)\rho(-K, u)^p + f_2(\tau)\rho(-(-K), u)^p \\ &= \rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}(-K), u)^p,\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K = \widetilde{\Delta}_p^{\tau}(-K)$. 另一方面,

$$\begin{aligned}\rho(-\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, u)^p = \rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, -u)^p &= f_1(\tau)\rho(K, -u)^p + f_2(\tau)\rho(-K, -u)^p \\ &= f_1(\tau)\rho(-K, u)^p + f_2(\tau)\rho(K, u)^p \\ &= f_1(-\tau)\rho(K, u)^p + f_2(-\tau)\rho(-K, u)^p \\ &= \rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K, u)^p,\end{aligned}$$

所以 $\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K = -\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$, 式(21)得证. 有

$$\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K, u)^p = f_1(\tau)\rho(K, u)^p + f_2(\tau)\rho(-K, u)^p,$$

$$\begin{aligned}\rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K,u)^p&=f_1(-\tau)\rho(K,u)^p+f_2(-\tau)\rho(-K,u)^p\\&=f_1(\tau)\rho(-K,u)^p+f_2(\tau)\rho(K,u)^p.\end{aligned}$$

如果 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$, 则 $\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K,u)=\rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K,u)$, 所以 $(f_1(\tau)-f_2(\tau))(\rho(K,u)^p-\rho(-K,u)^p)=0$. 而当 $\tau\neq 0$ 时, $f_1(\tau)\neq f_2(\tau)$, 因此 $K=-K$. 反之, 若 $K=-K$, 显然有 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$. 式(22)得证.

根据定理 4, 容易得到下面 3 个推论.

推论 4 设 $\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1, K\in\varphi^n$, 但 $K\overline{\in}\varphi_s^n$, 若 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$, 则 $\tau=0$.

推论 5 设 $K\in\varphi_s^n,\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1$, 则 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K=K$.

推论 6 设 $K,L\in\varphi_s^n,\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1$, 则 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}L\Leftrightarrow K=L$.

4 主要结果的证明

4.1 定理 1 的证明

设 $K\in\varphi^n$, $\tau\in[-1,1], p\geqslant 1, 0\leqslant i\leqslant n-1$. 根据式(4)和(18), 可得

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)^{\frac{p}{n-i}}&=\widetilde{W}_i(f_1(\tau)\cdot K\,\widetilde{+}_p\,f_2(\tau)\cdot(-K))^{\frac{p}{n-i}}\\&\leqslant f_1(\tau)\widetilde{W}_i(K)^{\frac{p}{n-i}}+f_2(\tau)\widetilde{W}_i(-K)^{\frac{p}{n-i}}.\end{aligned}$$

而 $\widetilde{W}_i(-K)=\widetilde{W}_i(K), f_1(\tau)+f_2(\tau)=1$, 所以 $\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)\leqslant\widetilde{W}_i(K)$, 等号成立当且仅当 $f_1(\tau)f_2(\tau)=0$ 或者 K 与 $-K$ 互相膨胀. 若 $f_1(\tau)f_2(\tau)=0$, 则 $\tau=\pm 1$; 若 K 与 $-K$ 互相膨胀, 则 $K=-K$ 即 K 关于原点中心对称. 由推论 5, 此时 $\forall\tau\in[-1,1],\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)\equiv\widetilde{W}_i(K)$. 因此式(9)右边不等式得证.

根据式(2)和(4), 对于任意的 $u\in S^{n-1}$, 有

$$\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K,u)^p=f_1(\tau)\rho(K,u)^p+f_2(\tau)\rho(-K,u)^p,$$

$$\rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K,u)^p=f_1(-\tau)\rho(K,u)^p+f_2(-\tau)\rho(-K,u)^p.$$

由式(6), 有

$$\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K,u)^p+\rho(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K,u)^p=\rho(K,u)^p+\rho(-K,u)^p,$$

即

$$\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K\,\widetilde{+}_p\,\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K=K\,\widetilde{+}_p\,(-K)=2\cdot\widetilde{\Delta}_pK.$$

而 $2\cdot\widetilde{\Delta}_pK=2^{\frac{1}{p}}\widetilde{\Delta}_pK$, 所以 $\widetilde{W}_i(2\cdot\widetilde{\Delta}_pK)^{\frac{p}{n-i}}=2\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_pK)^{\frac{p}{n-i}}$. 再根据式(18), 有

$$2\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_pK)^{\frac{p}{n-i}}=\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K\,\widetilde{+}_p\,\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K)^{\frac{p}{n-i}}\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)^{\frac{p}{n-i}}+\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K)^{\frac{p}{n-i}},$$

等号成立当且仅当 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$ 与 $\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$ 相互膨胀. 由式(1), (7)和(21), 有

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K)=\widetilde{W}_i(-\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)=\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K).$$

所以

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_pK)\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K),$$

等号成立当且仅当 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$ 与 $\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$ 相互膨胀. 如果 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K$ 与 $\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$ 互为膨胀, 由式(21), 有 $\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=-\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K=\widetilde{\Delta}_p^{-\tau}K$. 由式(22) 与推论 4, 可知式(9)中左边不等式的等号成立当且仅当 $\tau=0$ 或 $K=-K$, 当 $K=-K$ 即 K 关于原点中心对称时式(9)中左边不等式是恒等式. 定理 1 证毕.

4.2 定理 2 的证明

设 $K\in\varphi^n$, $u\in S^{n-1}$, 由式(1)和(11), 有

$$\rho(-K^o,u)=\rho(K^o,-u)=\rho(K,-u)^{-1}=\rho(-K,u)^{-1}=\rho((-K)^o,u).$$

因此

$$(-K)^o=-K^o. \tag{23}$$

对于 $\tau\in[-1,1]$, $p\geqslant 1$, 由式(4), (8), (13)和(23), 得到

$$\begin{aligned}\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K,\cdot)^{-p}&=\rho(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K,\cdot)^{p}=f_1(\tau)\rho(K,\cdot)^p+f_2(\tau)\rho(-K,\cdot)^p\\&=f_1(\tau)\rho(K^o,\cdot)^{-p}+f_2(\tau)\rho(-K^o,\cdot)^{-p}.\end{aligned}\tag{24}$$

所以

$$\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K=f_1(\tau)\cdot K^o\widetilde{+}_{-p}\,f_2(\tau)\cdot(-K^o). \tag{25}$$

对于 $0\leqslant i\leqslant n-1$, 结合式(17)和(25), 得到

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)^{\frac{-p}{n-i}}&=\widetilde{W}_i(f_1(\tau)\cdot K^o\,\widetilde{+}_{-p}\,f_2(\tau)\cdot(-K^o))^{\frac{-p}{n-i}}\\&\geqslant f_1(\tau)\widetilde{W}_i(K^o)^{\frac{-p}{n-i}}+f_2(\tau)\widetilde{W}_i(-K^o)^{\frac{-p}{n-i}}.\end{aligned}$$

由于 $\widetilde{W}_i(-K^o)=\widetilde{W}_i(K^o), f_1(\tau)+f_2(\tau)=1$, 有

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\leqslant\widetilde{W}_i(K^o), \tag{26}$$

等号成立当且仅当 $f_1(\tau)f_2(\tau)=0$ 或 K^o 和 $-K^o$ 互为膨胀. 如果 $f_1(\tau)f_2(\tau)=0$, 则 $\tau=\pm1$. 如果 K^o 和 $-K^o$ 互为膨胀, 有 $K^o=-K^o$, 根据式(8)和(23), 也就是说 $K=-K$. 再根据推论 5, 若 $K=-K$, 则对于任意的 $\tau\in[-1,1]$, $\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)=\widetilde{W}_i(K^o)$. 因此不等式组(11)右边的不等式得证.

根据式(7), 得到

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_{\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K}(u)^{n-i}\mathrm{d}S(u)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}(\rho_{\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K}(u)^{-p})^{-\frac{n-i}{p}}\mathrm{d}S(u). \tag{27}$$

对于 $\tau\in[-1,1]$, 利用文献[4, 14] 的证明技巧, 计算函数 $\tau\mapsto\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)$ 关于 τ 的导数. 根据式(14), (24) 和(27), 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)}{\partial\tau}&=-\frac{n-i}{np}\int_{S^{n-1}}\rho_{\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K}(u)^{n-i+p}\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho_{\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K}(u)^{-p})\Big)\mathrm{d}S(u)\\&=\frac{(n-i)f(\tau)}{np}\cdot\int_{S^{n-1}}\rho_{\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K}(u)^{n-i+p}(\rho_{K^o}(u)^{-p}-\rho_{-K^o}(u)^{-p})\mathrm{d}S(u)\\&=\frac{n-i}{p}\cdot f(\tau)\cdot(\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K,K^o)-\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K,-K^o)),\end{aligned}\tag{28}$$

这里

$$f(\tau)=-f_1'(\tau)=f_2'(\tau)=-\frac{2(1-\tau^2)^{p-1}}{[(1+\tau)^p+(1-\tau)^p]^2}\leqslant 0,\quad \tau\in[-1,1].$$

连续函数 $\tau\mapsto\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)$ 在 $[-1,1]$ 能够取得最小值. 从式(25)与(26), 可知函数 $\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)$ 在 $\tau=\pm1$ 处取得最大值. 因此函数 $\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)$ 在 $\tau\in(-1,1)$ 内取得最小值. 假设取得最小值点为 $\overline{\tau}\in(-1,1)$, 那么有

$$\frac{\partial\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)}{\partial\tau}|_{\tau=\overline{\tau}}=0.$$

由式(28), 等价于

$$\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,K^o)=\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,-K^o).\tag{29}$$

根据式(23)和(25), 有

$$\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K=f_1(\overline{\tau})\cdot K^o\widetilde{+}_{-p}\,f_2(\overline{\tau})\cdot(-K^o),\ \widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K)=f_1(\overline{\tau})\cdot(-K^o)\widetilde{+}_{-p}\,f_2(\overline{\tau})\cdot K^o.\tag{30}$$

在式(15)中取 $Q=\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K$, 并结合式(29) 与(30), 有

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{-p,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K))&=f_1(\overline{\tau})\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,-K^o)+f_2(\overline{\tau})\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,K^o)\\&=f_1(\overline{\tau})\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,K^o)+f_2(\overline{\tau})\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,-K^o)\\&=\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K)=\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K).\end{aligned}$$

根据式(16), 得到

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K)=\widetilde{W}_{-p,\,i}(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K,\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K))\geqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K)^{\frac{n-i+p}{n-i}}\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K))^{\frac{-p}{n-i}}.$$

因为 $p\geqslant1,0\leqslant i\leqslant n-1$, 所以

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K)\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K)),\tag{31}$$

等号成立当且仅当 $\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K$ 和 $\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K)$ 互为膨胀.

在式(15)中取 $Q=\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K)$, 利用式(16), (29)和(30), 同理有

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K))\leqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K),\tag{32}$$

等号成立当且仅当 $\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K$ 和 $\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K)$ 互为膨胀.

结合式(31)和(32), 得到

$$\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}K=\widetilde{\Delta}_p^{\overline{\tau},o}(-K).\tag{33}$$

根据式(13), (30)和(33), 对于任意的 $u\in S^{n-1}$, 有

$$(f_1(\overline{\tau})-f_2(\overline{\tau}))(\rho(K^o,u)^{-p}-\rho(-K^o,u)^{-p})=0.$$

如果 $f_1(\overline{\tau})-f_2(\overline{\tau})=0$, 那么 $\overline{\tau}=0$. 这也就是意味函数 $\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)$ 在 $\tau=0$ 处取得最小值, 即

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\geqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{o}K). \tag{34}$$

如果 $\rho(K^o,u)^{-p}=\rho(-K^o,u)^{-p}$ 对于任意的 $u\in S^{n-1}$ 成立, 根据式(8)和(23), 这等价于 $K=-K$. 再根据推论 5, 如果 $K=-K$, 得到

$$\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)=\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{o}K)\ ,\ \tau\in[-1,1].$$

因此式(11)左边的不等式得证.

根据式(11), (26)和(34)可知, 如果 K 不关于原点中心对称, 则式(11) 左边的不等式等号成立当且仅当 $\tau=0$, 右边的不等式等号成立当且仅当 $\tau=\pm1$. 如果 $K\in\varphi_s^n$，即 K 关于原点中心对称, 则式(11)中左右两个不等式是恒等式. 综上，定理 2 得证.

4.3 定理 3 的证明

设 $K\in\varphi^n$, $\tau\in[-1,1], p\geqslant1, 0\leqslant i\leqslant n-1$, 根据式(9), (11)和(19), 有

$$\widetilde{W}_i(K)\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\geqslant\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau}K)\widetilde{W}_i(\widetilde{\Delta}_p^{\tau,o}K)\geqslant w_n^2.$$

由式(9)和(19)的等号成立条件, 得到式(12)中等号成立当且仅当 K 为中心在原点的球.

参考文献:

[1] Ludwig M. Minkowski valuations [J]. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 4191-4213.

[2] Ludwig M. Intersection bodies and valuations [J]. Amer J Math, 2006, 128: 1409-1428.

[3] Haberl C. L_p intersection bodies [J]. Adv Math, 2008, 217: 2599-2624.

[4] Haberl C, Schuster F E. General L_p affine isoperimetric inequalities [J]. J Differential Geom, 2009, 83: 1-26.

[5] Haberl C, Schuster F E. Asymmetric affine L_p Sobolev inequalities [J]. J Funct Anal, 2009, 257: 641-658.

[6] Haberl C, Schuster F E, Xiao J. An asymmetric affine Pólya-Szegö principle [J]. Math Ann, 2012, 352: 517-542.

[7] Weberndorfer M. Shadow systems of asymmetric L_p zonotopes [J]. Adv Math, 2013, 240: 613-635.

[8] Parapatits L. $SL(n)$-covariant L_p-Minkowski valuations [J]. J Lond Math Soc, 2014, 89: 397-414.

[9] Parapatits L. $SL(n)$-contravariant L_p-Minkowski valuations [J]. Trans Amer Math Soc, 2014, 366: 1195-1211.

[10] Schuster F E, Wannerer T. $GL(n)$ contravariant Minkowski valuations [J]. Trans Amer Math Soc, 2012, 364: 815-826.

[11] Schuster F E, Weberndorfer M. Volume inequalities for asymmetric Wulff shapes [J]. J Differential Geom, 2012, 92: 263-283.

[12] Wang W D, Wan X Y. Shephard type problems for general L_p-projection bodies [J]. Taiwan J Math, 2012, 16: 1749-1762.

[13] Wang W D, Feng Y B. A general L_p-version of Petty's affine projection inequality [J]. Taiwan J Math, 2013, 17: 517-528.

[14] Wang W D, Ma T Y. Asymmetric L_p-difference bodies [J]. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 2517-2527.

[15] Wang W D. On inequalities for quermassintegrals and dual quermassintegrals of difference bodies [J]. Math Inequal Appl, 2014, 17: 41-48.

[16] Feng Y B, Wang W D, Lu F H. Some inequalities on general L_p-centroid bodies [J]. Math Ineq Appl, 2015, 18: 39-49.

[17] Schneider R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory [M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

[18] Lutwak E. Intersection bodies and dual mixed volumes [J]. Adv Math, 1988, 71: 232-261.

[19] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory: II. Affine and geominimal surface areas [J]. Adv Math, 1996, 118: 244-294.

[20] Moszyńska M. Quotient star bodies, intersection bodies, and star duality [J]. J Math Anal Appl, 1999, 232: 45-60.

[21] Wang W D, Leng G S. L_p-dual mixed quermassintegrals [J]. Indian J Pure Appl Math, 2005, 36: 177-188.

[22] 李小燕, 何斌吾. 对偶 Brunn-Minkowski-Firey 定理 [J]. 数学杂志, 2005, 25(3): 545-548.